PELABELAN $Q(a)P(b) -$ SUPER *GRACEFUL* – SISI PADA GRAF KUBUS HIPER Q_k UNTUK $k \leq 3$

Destian Dwi Asyani[1], Bayu Surarso[2], Robertus Heri Soelistyo Utomo[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto,SH. Tembalang Semarang 50275, Indonesia
destian.daa@gmail.com

ABSTRAK

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan suatu graf sederhana, berhingga dan tak berarah dengan $p = |V(G)|$ dan $= |E(G)|$. Jika a dan b bilangan asli maka $Q(a)$ dan $P(b)$ didefinisikan untuk q genap maka $Q(a) = \left\{\pm a, \dots, \pm\left(a + \frac{q-2}{2}\right)\right\}$, untuk q ganjil maka $Q(a) = \left\{0, \pm a, \pm(a+1), \dots, \pm\left(a + \frac{q-3}{2}\right)\right\}$, untuk p genap maka $P(b) = \left\{\pm b, \pm(b+1), \dots, \pm\left(b + \frac{p-2}{2}\right)\right\}$ dan untuk p ganjil maka $P(b) = \left\{0, \pm b, \pm(b+1), \dots, \pm\left(b + \frac{p-3}{2}\right)\right\}$. Sebuah graf G adalah graf $Q(a)P(b) - SGS$ jika terdapat pemetaan injektif $f: E(G) \to Q(a)$ sedemikian sehingga $f^*: V(G) \to P(b)$ yang didefinisikan oleh $f^*(v) = \sum_{uv \epsilon E(G)} f(uv)$ adalah pemetaan surjektif. Graf kubus hiper Q_1 dan graf kubus hiper Q_2 adalah bukan graf $Q(a)P(b) - SGS$. Hubungan nilai a dan b sehingga graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $Q(a)P(b) - SGS$ adalah jika $a = 1$ maka $1 \leq b \leq 7$, jika $a = 2$ maka $1 \leq b \leq 7$ dan jika $a \geq 3$ maka $b = 9$ and $a - 2 \leq b \leq a + 4$.

Kata Kunci : pelabelan $Q(a)P(b) - SGS$, graf kubus hiper.

1. PENDAHULUAN

Terdapat banyak pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf sudah banyak dikaji sejak pertengahan tahun 1960-an dan pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), lalu Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1967).

Pelabelan dari graf merupakan pemetaan yang memetakan unsur – unsur graf (titik atau sisi) ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik saja (pelabelan titik), himpunan sisi saja (pelabelan sisi), atau keduanya (pelabelan total).

Pelabelan *graceful* merupakan salah satu jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan. Dalam pengembangannya, dikenal pula Pelabelan α *(Balanced Labeling)*, Pelabelan *k-graceful*, Pelabelan *Skolem-Graceful*, Pelabelan *Graceful* Ganjil dan Pelabelan Cordial. Pelabelan *graceful* adalah salah satu yang luas penggunaannya, terutama diaplikasikan dalam radar, jaringan komunikasi, desain sirkuit, teori koding, astronomi dan kristalografi. Studi tentang graf *graceful* dan metode pelabelan *graceful* diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967. Sebuah graf G dengan p titik dan q sisi dikatakan *graceful* jika terdapat sebuah pemetaan injektif $f: V(G) \to \{0,1,2,\dots,q\}$ sehingga diperoleh $f^*: E(G) \to \{0,1,2,\dots,q\}$ dimana $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ adalah pemetaan surjektif. Sebuah graf yang berlaku pelabelan *graceful* disebut graf *graceful*.

Graf Kubus hiper (kubus$-k$) dapat direpresentasikan sebagai graf tak berarah $Q_k = (V,E)$ dimana V adalah himpunan titik yang memuat 2^k titik yang diberi label sebagai bilangan biner dengan banyaknya titik k dari $\underbrace{00\dots0}_{k}$ ke $\underbrace{11\dots1}_{k}$ dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua titik jika hanya jika titik – titik tersebut berbeda tepat satu bit dari labelnya. Dengan demikian, masing – masing titik memiliki hubungan langsung dengan k titik lainnya dan dengan mudah ditunjukkan bahwa $|E| = k2^{k-1}$.

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan *graceful* telah dilakukan oleh Triyas Lestari [1] dalam tugas akhirnya yang berjudul "Pelabelan *Graceful* dan *Graceful* Ganjil pada Graf *Path*, Graf Sikel, Gabungan Graf Sikel dan Graf *Path*". Tulisan ini melanjutkan kajian tentang pelabelan *graceful* yaitu pelabelan $Q(a)\,P(b)$ – super *graceful* – sisi pada graf kubus hiper Q_k untuk $k \le 3$.

2. PELABELAN $Q(a)\,P(b)$ − SUPER *GRACEFUL*-SISI

Definisi 2.1 [2]

Untuk suatu graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, dengan $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$. Jika a dan b bilangan asli maka $Q(a)$ dan $P(b)$ didefinisikan

$$Q(a) = \begin{cases} \left\{\pm a, \pm(a+1), \dots, \pm\left(a + \frac{q-2}{2}\right)\right\}, \text{ jika } q \text{ genap} \\ \\ \left\{0, \pm a, \pm(a+1), \dots, \pm\left(a + \frac{q-3}{2}\right)\right\}, \text{ jika } q \text{ ganjil} \end{cases} \quad \dots (3.3)$$

$$P(b) = \begin{cases} \left\{\pm b, \pm(b+1), \dots, \pm\left(b + \frac{p-2}{2}\right)\right\}, \text{ jika } p \text{ genap} \\ \\ \left\{0, \pm b, \pm(b+1), \dots, \pm\left(b + \frac{p-3}{2}\right)\right\}, \text{ jika } p \text{ ganjil} \end{cases} \quad \dots (3.4)$$

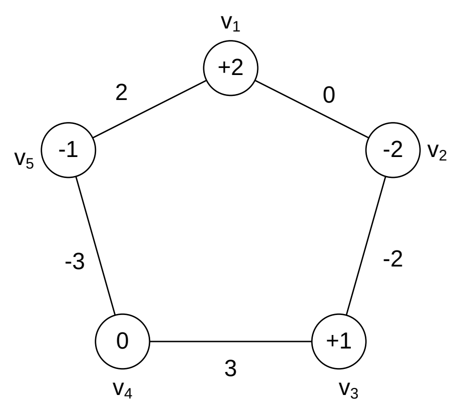
Sebuah graf G adalah graf $Q(a)\,P(b)$ − super *graceful*-sisi jika terdapat pemetaan injektif $f: E(G) \to Q(a)$ sedemikian sehingga $f^*: V(G) \to P(b)$ didefinisikan oleh $f^*(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ adalah pemetaan surjektif.

Contoh 2.1

Sebagai contoh diberikan graf C_5 dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$, maka $p = 5$ dan $q = 5$. Akan dibuktikan bahwa graf tersebut adalah graf $Q(a)\ P(b) -$ super *graceful*-sisi dengan mengambil kasus $a = 2$ dan $b = 1$, sehingga dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $Q(2) = \{0\ , \pm 2, \pm 3\}$ dan $P(1) = \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Misalkan $f: E(G) \to Q(2)$ adalah suatu pelabelan sisi dimana $f(v_1v_2) = 0$, $f(v_2v_3) = -2$, $f(v_3v_4) = +3$, $f(v_4v_5) = -3$ dan $f(v_5v_1) = +2$. Dari definisi pemetaan injektif, f adalah pemetaan injektif. Misalkan $f^*: V(G) \to P(1)$ adalah suatu pelabelan titik, sedemikian sehingga didefinisikan

$$f^*(\ v_1) = f(v_1v_2) + f(v_5v_1)\ = +2\ ,$$
$$f^*(\ v_2) = f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = -2,$$
$$f^*(\ v_3) = f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = +1,$$
$$f^*(\ v_4) = f(v_3v_4) + f(v_4v_5) = \ 0 \text{ dan}$$
$$f^*(\ v_5) = f(v_4v_5) + f(v_5v_6) = -1.$$

Dari definisi pemetaan surjektif, f^* adalah pemetaan surjektif. Oleh karena itu, graf C_5 adalah graf $Q(2)\ P(1) -$ super *graceful*-sisi dan pelabelannya dapat dilihat pada Gambar berikut,



3. PELABELAN $Q(a)\ P(b) -$ SUPER *GRACEFUL*-SISI PADA Q_1 DAN Q_2

Teorema 3.1 [2]

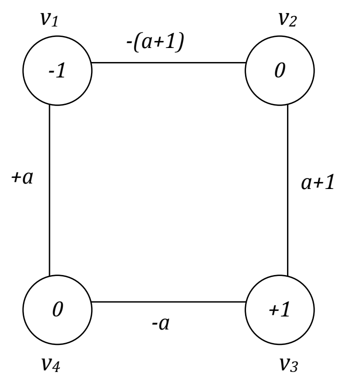
Graf kubus hiper Q_1 dan Q_2 bukan adalah $(a, b) -\ SGS$ untuk setiap bilangan asli a dan b.

Bukti :

a) Pada graf kubus hiper $Q_1(V(Q_1), E(Q_1))$ misalkan $V(Q_1) = \{v_1, v_2\}$ dan $E(Q_1) = \{v_1v_2\}$ maka $p = |V(Q_1)| = 2$ dan $q = |E(Q_1)|\ = 1$. Misalkan a dan b bilangan asli, maka dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $Q(a) = \{0\}$ dan

$P(b) = \{\pm b\}$. Akan dibuktikan bahwa graf kubus hiper Q_1 adalah bukan graf $(a,b) - SGS$. Misalkan $f: E(Q_1) \to Q(a)$ adalah pelabelan sisi dimana untuk setiap $f(v_1v_2) = 0$, sehingga $f: E(Q_1) \to Q(a)$ adalah pemetaan injektif. Misalkan $f^*: V(Q_1) \to P(b)$ adalah suatu pelabelan sisi, menurut Definisi 3.1.2 diperoleh, $f^*(v_1) = f(v_2v_1) = 0$ dan $f^*(v_2) = f(v_1v_2) = 0$. Karena 0 adalah bukan anggota himpunana $P(b)$ sehingga $f^*: V(Q_1) \to P(b)$ adalah bukan pemetaan surjektif, dapat disimpulkan bahwa graf kubus hiper Q_1 bukan $(a,b) - SGS$ untuk setiap bilangan asli a dan b.

b) Pada graf kubus hiper $Q_2\big(V(Q_2), E(Q_2)\big)$ misalkan $V(Q_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(Q_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ maka $p = |V(Q_2)| = 4$ dan $q = |E(Q_2)| = 4$. Misalkan a dan b bilangan asli, maka dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $Q(a) = \{\pm a, \pm(a+1)\}$ dan $P(b) = \{\pm b, \pm(b+1)\}$. Akan dibuktikan bahwa graf kubus hiper Q_2 adalah bukan graf $(a,b) - SGS$. Misalkan $f: E(Q_2) \to Q(a)$ adalah pelabelan sisi dimana untuk setiap $f(v_1v_2) = -(a+1)$, $f(v_2v_3) = +(a+1)$, $f(v_3v_4) = -a$ dan $f(v_4v_1) = +a$, sehingga $f: E(Q_2) \to Q(a)$adalah pemetaan injektif. Misalkan $f^*: V(G) \to P(b)$ adalah pelabelan titik, sehingga diperoleh $f^*(v_1) = f(v_1v_2) + f(v_4v_1) = -1$, $f^*(v_2) = f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 0$, $f^*(v_3) = f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = +1$ dan $f^*(v_4) = f(v_3v_4) + f(v_4v_1) = 0$. Pelabelan tersebut dapat dilihat pada gambar berikut ,



Karena 0 dan ± 1 adalah bukan anggota himpunan $P(b)$ sehingga $f^*: V(G) \to P(b)$ adalah bukan pemetaan surjektif. Dengan kata lain, dua sisi yang berlabel $+a$ dan $-a$ tidak dapat bersisian pada setiap titik. Sehingga sisi yang berlabel $+a$ dan $-a$ harus *disjoint* satu dengan yang lainnya, sehingga menurut Definisi 3.1.2 diperoleh $f^*(V_1) = -1$, $f^*(V_2) = -(2a+1)$, $f^*(V_3) = +(2a+1)$ dan $f^*(V_4) = +1$. Karena ± 1 dan $\pm(2a+1)$ adalah bukan anggota himpunan $P(b)$ sehingga $f^*: V(G) \to P(b)$ adalah bukan pemetaan surjektif. Dengan demikian Q_2 bukan pelabelan $(a,b) - SGS$. ■

4. PELABELAN $Q(a)\ P(b)$ – SUPER *GRACEFUL*-SISI PADA Q_3 JIKA $a \geq b$

Lema 4. 1 [2]

Graf kubus hiper Q_3 adalah bukan graf $(a, b) - SGS$ jika $a > b + 4$.

Bukti :
Akan dibuktikan jika $a > b + 4$ maka graf kubus hiper Q_3 adalah bukan $(a, b) - SGS$. Diketahui $a > b + 4$ dengan kata lain $a - 4 > b$, maka $a - 4 = a + (a + 1) - (a + 5)$ adalah nilai label positif yang terkecil, sehingga graf kubus hiper Q_3 bukan graf $(a, b) - SGS$ jika $a > b + 4$.

Lema 4.2 [2]
Kubus hiper Q_3 adalah bukan graf $(b + 4, b) - SGS$.
Bukti :
Pada graf kubus hiper Q_3 misalkan $E(Q_3) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_4v_8, v_5v_8, v_5v_6, v_6v_2, v_7v_8, v_7v_6, v_4v_3, v_2v_3, v_3v_7\}$ dan $V(Q_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, maka $p = |V(Q_2)| = 8$ dan $= |E(Q_2)| = 12$. Misalkan $a = b + 4$ dan b bilangan asli sehingga dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $Q(b + 4) = \{\pm(b + 4), \dots, \pm(b + 9)\}$ dan $P(b) = \{\pm b, \pm(b + 1), \dots, \pm(b + 3)$. Akan dibuktikan bahwa graf kubus hiper Q_3 adalah bukan graf $(b + 4, b) - SGS$. Misalkan $f: E(Q_3) \rightarrow Q(a)$ adalah pelabelan sisi dan $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(b)$ adalah pelabelan titik. Misalkan $f^*(v_1) = b$ dan $f^*(v_2) = b + 1$, menurut Definisi 3.1.2 diperoleh

$$f^*(v_1) = f(v_1v_2) + f(v_1v_4) + f(v_1v_5)$$
$$b = (b + 4) + (b + 5) + (-(b + 9)) \qquad \dots(3.5)$$
$$f^*(v_2) = f(v_1v_2) + f(v_2v_6) + f(v_2v_3)$$

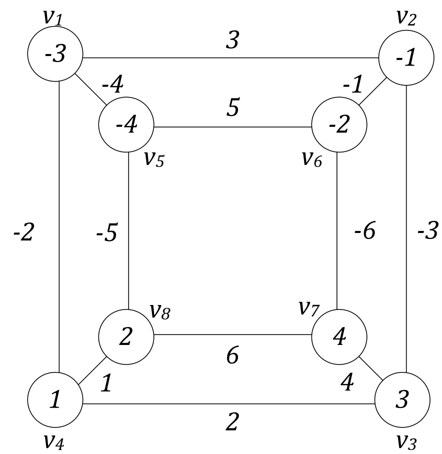
Hanya ada dua kemungkinan untuk melabeli titik v_2 yaitu :

$$f^*(v_2) = b + 1 = (b + 4) + (b + 5) + (-(b + 8)) \qquad \dots(3.6)$$
$$f^*(v_2) = b + 1 = (b + 4) + (b + 6) + (-(b + 9)) \qquad \dots(3.7)$$

Diketahui bahwa kombinasi (3.5) dan (3.6) tidak dapat terjadi bersamaan karena akan terbentuk sisi ganda berlabel $b + 4$ dan $b + 5$ sehingga $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(b)$ adalah bukan pemetaan surjektif. Begitu pula (3.5) dan (3.7) tidak dapat terjadi bersamaan karena akan terbentuk sisi ganda berlabel $b + 4$ dan $-(b + 9)$ sehingga $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(b)$ adalah bukan pemetaan surjektif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf kubus hiper Q_3 bukan graf $(b + 4, b) - SGS$. ■

Lema 4.3 [2]
Kubus hiper Q_3 adalah bukan graf $(b + 3, b) - SGS$.

Definisi 4.4 [2]
Sebuah pelabelan $(a, b) - SGS$ dikatakan seimbang jika jumlah dari label sisi – sisi positif dan negatif yang bersisian pada tiap – tiap titik berjumlah ± 1. Sebuah pelabelan $(a, b) - SGS$ dikatakan tidak seimbang jika terdapat sebuah titik yang bersisian dengan tiga sisi yang bertanda sama.
Contoh 4.4
Dimisalkan graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(1,1) - SGS$ dan pelabelannya dapat dilihat pada gambar berikut,



Berdasarkan Definisi 4.4, pada pelabelan diatas dapat dilihat bahwa jumlah dari sisi – sisi positif dan negatif yang bersisian pada tiap – tiap titik berjumlah ± 1 dan tidak ada sisi – sisi yang bersisian yang bertanda sama pada tiap – tiap titik. Oleh karena itu, pelabelan $(1,1) - SGS$ pada graf Q_3 dapat dikatakan seimbang.

Lema 4.5 [2]
Jika sebuah graf kubus berlaku pelabelan $(a, b) - SGS$ seimbang, maka berlaku juga $(a + k, b + k) - SGS$ untuk setiap bilangan cacah k.

Teorema 4.6 [2]
Untuk $a \geq b$, kubus hiper Q_3 adalah graf $(a, b) - SGS$ jika hanya jika $a = b, a = b + 1$ dan $a = b + 2$.

5. PELABELAN $Q(a)$ $P(b) -$ SUPER *GRACEFUL*-SISI PADA Q_3 JIKA $a < b$

Teorema 5.1 [2]
Graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(a, b) - SGS$ untuk $b - a = 1, b - a = 2$, $b - a = 3$ dan $b - a = 4$.

Teorema 5.2 [2]
Jika $a + 5 \leq b$, maka berlaku pelabelan $(a, b) - SGS$ tidak seimbang.
Bukti:
Pada graf kubus hiper Q_3 misalkan $E(Q_3) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_4v_8, v_5v_8, v_5v_6, v_2v_6, v_7v_8, v_7v_6, v_4v_3, v_2v_3, v_3v_7\}$ dan $V(Q_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, maka $p = |V(Q_3)| = 8$ dan $q = |E(Q_3)| = 12$. Misalkan a dan b bilangan asli, maka dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $Q(a) = \{\pm a, \ldots, \pm(a + 5)\}$ dan $P(b) = \{\pm b, \ldots, \pm(b + 3)\}$. Misalkan graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(a, b) - SGS$ seimbang. Maka label titik positif seimbang yang terbesar dimisalkan $f^*(v_1) = a + 9$. Sedemikian sehingga $b + 3 \leq a + 9$ maka $b \leq a + 6$. Jika $b = a + 6$, maka diperoleh $P(b) = \{\pm a, \ldots, \pm(a + 9)\}$. Misalkan $f^*(v_1) = a + 9$ dan $f^*(v_2) = a + 8$, menurut Definisi 3.1.2 diperoleh,

$$f^*(v_1) = f(v_1v_2) + f(v_4v_1) + f(v_1v_5)$$
$$a+9 = (a+5) + (a+4) - a$$
$$f^*(v_2) = f(v_2v_1) + f(v_2v_6) + f(v_2v_3)$$

Hanya ada dua kemungkinan untuk melabeli titik v_2 yaitu

$$f^*(v_2) = a+8 = (a+5) + (a+4) - (a+1)$$
$$f^*(v_2) = a+8 = (a+5) + (a+3) - a$$

Dapat dilihat bahwa $f^*(v_1)$ dan titik $f^*(v_2)$ tidak dapat terjadi bersamaan Sehingga diperoleh kontradiksi bahwa graf kubus hiper Q_3 bukan graf $(a,b) - SGS$ seimbang. Jika $b = a+5$, maka diperoleh $P(b) = \{\pm a, \dots, \pm(a+8)\}$. Misalkan $f^*(v_1) = a+8$ dan $f^*(v_2) = a+7$, menurut Definisi 3.1.2 diperoleh,

$$f^*(v_1) = f(v_1v_2) + f(v_1v_4) + f(v_1v_5)$$
$$f^*(v_2) = f(v_1v_2) + f(v_2v_6) + f(v_2v_3)$$

Hanya ada tiga kemungkinan kombinasi untuk melabeli titik v_1 dan v_2 yaitu,

$$\begin{cases} f^*(v_1) = a+8 = (a+5) + (a+4) - (a+1) \\ f^*(v_2) = a+7 = (a+5) + (a+2) - a \end{cases}$$
$$\begin{cases} f^*(v_1) = a+8 = (a+4) + (a+5) - (a+1) \\ f^*(v_2) = a+7 = (a+4) + (a+3) - a \end{cases}$$
$$\begin{cases} f^*(v_1) = a+8 = (a+5) + (a+3) - a \\ f^*(v_2) = a+7 = (a+5) + (a+4) - (a+2) \end{cases}$$

Untuk melabeli titik $f^*(v_4) = a+6$ menurut Definisi 3.1.2 diperoleh,

$$f^*(v_4) = f(v_1v_4) + f(v_4v_8) + f(v_3v_4)$$

Hanya ada enam kemungkinan untuk melabeli titik v_4 yaitu,

$$f^*(v_4) = a+6 = (a+4) + (a+3) - (a+1),$$
$$f^*(v_4) = a+6 = (a+4) + (a+2) - a,$$
$$f^*(v_4) = a+6 = (a+5) + (a+4) - (a+3),$$
$$f^*(v_4) = a+6 = (a+5) + (a+3) - (a+2),$$
$$f^*(v_4) = a+6 = (a+5) + (a+2) - (a+1),$$
$$f^*(v_4) = a+6 = (a+5) + (a+1) - a,$$

Dapat dilihat bahwa kombinasi $f^*(v_1)$, $f^*(v_2)$ dan $f^*(v_4)$ tidak dapat terjadi bersamaan karena akan terbentuk segitiga yang menghubungkan tiga titik yang berlabel $a+8$, $a+7$ dan $a+6$, sehingga $f^*: V(Q_3) \to P(b)$ adalah bukan pemetaan surjektif. Dengan demikian diperoleh kontradiksi bahwa untuk $a+5 \leq b$, setiap pelabelan $(a,b) - SGS$ harus tidak seimbang. ■

Lema 5.3 [2]
Untuk setiap pelabelan $(a,b) - SGS$ pada graf kubus hiper Q_3 memuat paling banyak dua label titik positif tidak seimbang.

Lema 5.4 [2]
Jika $|f^*(u)| \geq a+10$, maka u harus tidak seimbang

Teorema 5. 5 [2]
Untuk $a+5 \leq b$, jika graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(a,b) - SGS$ maka $max(a+5, 3a) \leq b \leq a+8$ dan $a \leq 3$.

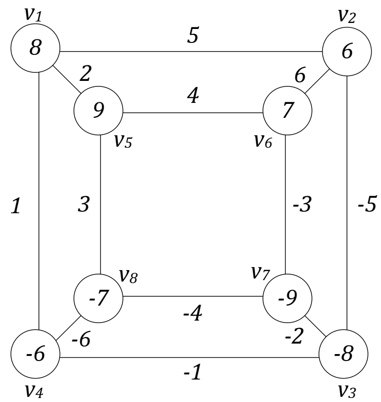
Bukti:
Untuk $a + 5 \leq b$, jika graf kubus hiper Q_3 adalah $(a, b) - SGS$, maka $max(a + 5{,}3a) \leq b \leq a + 8$ dan $a \leq 3$.
Pada graf kubus hiper Q_3 misalkan $V(Q_3)$ himpunan titik dan $E(Q_3)$ himpunan sisi maka $p = |V(Q_3)| =$ 8 dan $q = |E(Q_3)| = 12$. Misalkan a dan b bilangan asli, dari (3.3) dan (3.4) maka diperoleh $Q(a) = \{\pm a, \ldots, \pm(a + 5)\}$ dan $P(b) = \{\pm b, \ldots, \pm(b + 3)\}$. Misalkan graf kubus hiper Q_3 adalah $(a, b) - SGS$, akan dibuktikan bahwa $max(a + 5{,}3a) \leq b \leq a + 8$ dan $a \leq 3$.
Misalkan $a + 5 \leq b$ maka menurut Lema 4.2, pelabelan $(a, b) - SGS$ pasti tidak seimbang. Menurut Lema 5.3 pelabelan $(a, b) - SGS$ graf kubus hiper Q_3 memuat paling banyak dua label titik positif tidak seimbang. Misalkan u dan v adalah titik – titik berlabel positif tidak seimbang pada pelabelan $(a, b) - SGS$ graf kubus hiper Q_3, menurut Lema 5.4 maka $f^*(u) = a + 10$ dan $f^*(u) = a + 11$. Agar $P(b)$ memuat kedua titik tersebut, $b + 3 \leq a + 11$, dengan kata lain $b \leq a + 8$. Misalkan w adalah label titik positif tidak seimbang terkecil. Diasumsikan bahwa w bersisian dengan tiga sisi berlabel positif. Maka menurut Definisi 3.1.2 diperoleh, $f^*(w) = a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3$, sehingga dibutuhkan $3a + 3 \leq b + 3$, dengan kata lain $b \geq 3a$. Oleh karena itu, $max(a + 5{,}3a) \leq b \leq a + 8$ dimana tidak ada solusi untuk $a \geq 5$. Jika $a = 4$, maka $b = 12$ sehingga dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $Q(4) = \{\pm 4, \ldots, \pm 9\}$ dan $P(12) = \{\pm 12, \ldots, \pm 15\}$.
Label titik positif tidak seimbang terkecil yaitu 15 dan label titik positif terbesar seimbang yaitu 13. Meninggalkan 14 yang termuat pada $P(12)$ dan tidak ada label titik yang seimbang atau tidak seimbang, yang masuk akal. Dapat disimpulkan bahwa $a \leq 3$. Oleh karena itu terbukti untuk $a + 5 \leq b$, jika graf kubus Q_3 adalah $(a, b) - SGS$, maka $max(a + 5{,}3a) \leq b \leq a + 8$ dan $a \leq 3$. ■

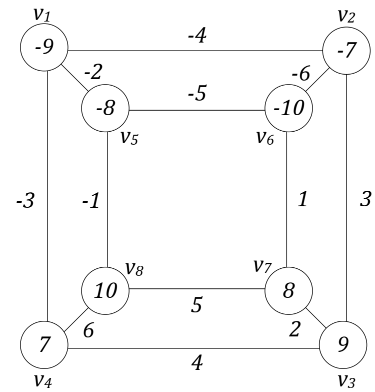
Teorema 5.6 [2]
Jika $b \geq 8$ maka graf kubus hiper Q_3 adalah bukan graf $(3, b) - SGS$.

Teorema 5.7 [2]
Untuk $b \geq 7$, graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(2, b) - SGS$ jika dan hanya jika $b = 7$ dan $b = 9$.

Teorema 5. 8 [2]
Untuk $b \geq 6$, graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(1, b) - SGS$ jika dan hanya jika $b = 6$ dan $b = 7$.
Bukti :
$\Longrightarrow$ Untuk $b \geq 6$, jika graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(1, b) - SGS$ maka $b = 6$ dan $b = 7$.
Lihat Definisi 3.1.2 untuk memperoleh $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(6)$, $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(7)$, $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(8)$ dan $f^*: V(Q_3) \rightarrow P(9)$, sedemikian sehingga terbukti bahwa graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(1{,}6) - SGS$ atau graf $(1{,}7) - SGS$.
$\Longleftarrow$ Untuk $b \geq 6$, jika $b = 6$ dan $b = 7$ maka graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(1, b) - SGS$.

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa graf kubus hiper Q_3 adalah graf $(1,6) - SGS$ atau graf $(1,7) - SGS$, dan pelabelannya dapat dilihat pada gambar berikut





Teorema Akibat 5.9 [2]

Graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ jika $a = 1$ dan $1 \leq b \leq 7$, $a = 2$ dan $1 \leq b \leq 7$ atau $b = 9$ serta $a \geq 3$ dan $a - 2 \leq b \leq a + 4$.

Bukti :

Pada graf kubus hiper Q_3 misalkan $E(Q_3) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_4v_8, v_5v_8, v_5v_6, v_2v_6, v_7v_8, v_7v_6, v_4v_3, v_2v_3, v_3v_7\}$ dan $V(Q_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ maka $p = |V(Q_3)| = 8$ dan $q = |E(Q_3)| = 12$. Untuk $a = 1$, berdasarkan Teorema 3.3.6 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $b = 1, b = 2$ dan $b = 3$, berdasarkan Teorema 5.1 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $b = 4$ dan $b = 5$ serta berdasarkan Teorema 5.8 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $b = 6$ dan $b = 7$. Untuk $a = 2$, berdasarkan Teorema 4.6 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $b = 1$ dan $b = 2$, berdasarkan Teorema 5.1 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $b = 3$, $b = 4$, $b = 5$ dan $b = 6$ serta berdasarkan Teorema 5.7 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $b = 7$ dan $b = 9$. Untuk $a \geq 3$, berdasarkan Teorema 4.5, Teorema 4.6 dan Teorema 5.1 graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ untuk $a - 2 \leq b \leq a + 4$. Oleh karena itu terbukti bahwa graf kubus hiper Q_3 merupakan graf $(a,b) - SGS$ jika $a = 1$ dan $1 \leq b \leq 7$, $a = 2$ dan $1 \leq b \leq 7$ atau $b = 9$ serta $a \geq 3$ dan $a - 2 \leq b \leq a + 4$. ■

DAFTAR PUSTAKA

[1] Lestari. Triyas. 2010. *"Pelabelan Graceful dan Graceful Ganjil pada Graf Path, Graf Sikel, Gabungan Graf Sikel dan Graf Path"*. Universitas Diponegoro. Semarang.

[2] Lee, S.M. and Harris Kwong. 2007. *On Q(a) P(b)*-super edge-*gracefulness* of *Hypercubes*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (JCMCC) Volume 62. 25-34.